



TITLE:

Iterated Boolean Powers (Boole代 数値の解析学と超準解析)

AUTHOR(S):

高橋, 真

CITATION:

高橋, 真. Iterated Boolean Powers (Boole代数値の解析学と超準解析).
数理解析研究所講究録 1981, 441: 57-65

ISSUE DATE:

1981-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102832>

RIGHT:

Iterated Boolean powers

早大 理工 高橋 真

[4] に於いて R. Mansfield は次の定理を証明している。

定理 ([4]) 完備ブール代数 B が $(\leq k, \infty)$ distributive law を満たし、完備ブール代数 A が B に関する $\leq k$ chain condition を満たすとする。もしブール代数 $B(A)$ が完備ならば、iterated Boolean ultrapower $(M^{(A)}/\mu)^{(B)}/\nu$ は Boolean ultrapower $M^{(B(A))}/\mu \times \nu$ に同型である。但し μ, ν はそれぞれ A, B 上の ultrafilter とする。

ここでは、 $B(A)$ が完備という仮定は必要でないことを第一に示す。すなわち、完備ブール代数 B が $(\leq k, \infty)$ distributive law を満たし、完備ブール代数 A が B に関する $\leq k$ chain condition を満たすならば、 $B(A)$ は完備であることが示される。第二にここでは、 $B(A)$ -valued structure $(M^{(A)})^{(B)}$ を定義した後に、これが $B(A)$ -valued structure として、定理と同じ仮定の下に $M^{(B(A))}$ と同型であることを示す。

§1 定義

\mathcal{L} : 等号を持ち, 定数記号, 関数記号を持たない一階の言語.

$\mathcal{L}(I)$: \mathcal{L} に定数記号 $\{c_i \mid i \in I\}$ を導入した一階の言語.

$S(I)$: $\mathcal{L}(I)$ の sentences 全体

M : \mathcal{L} -structure

A, B : ブール代数, $B^+ = B - \{0\}$, $B|b = \{a \in B \mid a \leq b\}$.

$|X|$: X の濃度

B が λ -完備 $\Leftrightarrow \forall X \subset B [|X| < \lambda \Rightarrow X \text{ の最小上界が存在する}]$

B が完備 $\Leftrightarrow \forall \lambda [B \text{ が } \lambda\text{-完備}]$.

$\{b_i \mid i \in I\}$ が pairwise disjoint family (p.d.f.)

$\Leftrightarrow \forall i, j [i \neq j \Rightarrow b_i \wedge b_j = 0]$.

$\{b_i \mid i \in I\}$ が 1 の分解

$\Leftrightarrow \forall i, j [i \neq j \Rightarrow b_i \wedge b_j = 0]$ 且 $\bigvee_{i \in I} b_i = 1$.

$\text{PDF}(B)$: B の p.d.f. 全体

$\text{PART}(B)$: B の 1 の分解全体

$N = \langle N, \llbracket \cdot \rrbracket_N \rangle$ が B -valued structure

\Leftrightarrow i) $\llbracket \cdot \rrbracket_N$ は $S(N)$ から B への関数

ii) $\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket_N = \llbracket \varphi \rrbracket_N \vee \llbracket \psi \rrbracket_N$

$\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket_N = \llbracket \varphi \rrbracket_N \wedge \llbracket \psi \rrbracket_N$

$\llbracket \neg \varphi \rrbracket_N = \sim \llbracket \varphi \rrbracket_N$

$$\llbracket \exists x \varphi(x) \rrbracket_N = \bigvee \{ \llbracket \varphi(c_f) \rrbracket \mid f \in N \}$$

$$\llbracket \forall x \varphi(x) \rrbracket_N = \bigwedge \{ \llbracket \varphi(c_f) \rrbracket \mid f \in N \}$$

$$\llbracket \text{Equality axioms} \rrbracket = 1.$$

以下 $\llbracket \varphi(c_{f_1}, \dots, c_{f_k}) \rrbracket_N = \llbracket \varphi(f_1, \dots, f_k) \rrbracket$ と書くことにする.

$N, N' : \mathcal{B}$ -valued structures

関数 $e : N \rightarrow N'$ が \mathcal{B} -elementary embedding

\Leftrightarrow i) e : injection

$$\text{ii) } \llbracket \varphi(f_1, \dots, f_k) \rrbracket_N = \llbracket \varphi(e(f_1), \dots, e(f_k)) \rrbracket_{N'}$$

\mathcal{B} -elementary embedding e が \mathcal{B} -isomorphism

$\Leftrightarrow e$: surjection.

$N <_{\mathcal{B}} N' \Leftrightarrow \mathcal{B}$ -elementary embedding $e : N \rightarrow N'$ が存在する.

$N \cong_{\mathcal{B}} N' \Leftrightarrow \mathcal{B}$ -isomorphism $e : N \rightarrow N'$ が存在する.

A が \mathcal{B} に関する $< \kappa$ chain condition を満たす

$$\Leftrightarrow \textcircled{1} P : A \rightarrow \mathcal{B} \left[\textcircled{2} a, a' [P(a) \wedge P(a') = 0 \Rightarrow a = a' \text{ or } a \wedge a' = 0] \right]$$

$$\Rightarrow \textcircled{3} \{ b_i \mid i \in I \} \subset \mathcal{B} \left[\bigvee_{i \in I} b_i = 1 \text{ \& \& } \textcircled{4} i \in I [|\{ a \mid P(a) \wedge b_i > 0 \}| \leq 1] \right]$$

\mathcal{B} が $(< \kappa, \lambda)$ distributive law を満たす

$$\Leftrightarrow \textcircled{5} \delta < \kappa \textcircled{6} \{ a_{\alpha\beta} \in \mathcal{B} \mid \alpha < \delta, \beta < \lambda \} \left[\bigwedge_{\alpha < \delta} \bigvee_{\beta < \lambda} a_{\alpha\beta} = \bigvee_{\beta < \lambda} \bigwedge_{\alpha < \delta} a_{\alpha+\beta} \right]$$

(A, \mathcal{B}) は κ -Mansfield pair である

\Leftrightarrow i) A が \mathcal{B} に関する $< \kappa$ chain condition を満たす

ii) \mathcal{B} が $(< \kappa, |A|)$ distributive law を満たす

§2 ブール代数 $\mathcal{B}(A)$

ここでは \mathcal{B} は完備とする。

ブール代数 $\mathcal{B}(A)$ を次の様に定義する。

$$\mathcal{B}(A) = \{f \in \mathcal{B}^A \mid \{f(a) \mid a \in A\} \in \text{PART}(\mathcal{B})\},$$

$$f \vee g (a) = \bigvee \{f(b_1) \wedge g(b_2) \mid b_1 \vee b_2 = a\},$$

$$f \wedge g (a) = \bigwedge \{f(b_1) \wedge g(b_2) \mid b_1 \wedge b_2 = a\},$$

$$\sim f (a) = f(\sim a).$$

次の lemmas 1-4 は有用である。(Mansfield [4] を見よ。)

lemma 1 $\{b_i \mid i \in I\} \in \text{PART}(\mathcal{B})$, $\{f_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{B}(A)$ とする。このとき、任意の $i \in I$ に対し $\bigvee \{f(a) \wedge f_i(a) \mid a \in A\} \geq b_i$ とする $f \in \mathcal{B}(A)$ が存在する。又、この f は一意的に決まるので、 $\sum_{i \in I} b_i \cdot f_i$ 又は $\sum_i b_i \cdot f_i$ と書くことにする。

lemma 2 (i) 任意の $f \in \mathcal{B}(A)$ に対し、 $f = \sum_{a \in A} f(a) \cdot a^*$ 。

$$\text{但し } a^*(c) = \begin{cases} 1 & \text{if } c = a, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \text{ とする。}$$

(ii) 任意の $a \in A$ に対し $\sum_i b_i \cdot a_i^* (a) = \bigvee \{b_i \mid a_i = a\}$ 。

$$\begin{aligned} \text{lemma 3 (i)} \quad \sum_i b_i \cdot a_i^* \bigvee \sum_j t_j \cdot s_j^* &= \sum_{i,j} (b_i \wedge t_j) \cdot (a_i \vee s_j)^*, \\ \sum_i b_i \cdot a_i^* \wedge \sum_j t_j \cdot s_j^* &= \sum_{i,j} (b_i \wedge t_j) \cdot (a_i \wedge s_j)^*, \\ \sim \sum_i b_i \cdot a_i^* &= \sum_i b_i \cdot (\sim a_i)^*. \end{aligned}$$

(ii) $\{a_{ij} \mid j \in J\} (i \in I)$ が最小上界を持つとすると、 $\sum_i b_i \cdot (\bigvee_j a_{ij})^*$ は $\{\sum_i b_i \cdot a_{ij}^* \mid j \in J\}$ の最小上界である。

lemma 4 $f_1 \wedge f_2 = 0^*$ とする。 $f_1(a_1) \wedge f_2(a_2) > 0$ ならば
 $a_1 \wedge a_2 = 0$ である。

lemma 5 (folklore) 任意の $\{a_\alpha \mid \alpha < \delta\} \in \text{PDF}(A)$ ($\delta < \lambda$) が
 最小上界を持つならば, A は λ -完備である。

proof) A は λ -完備でないとする。 $\delta_0 = \sup\{\delta \mid A \text{ は } \delta\text{-完備}\}$
 とおくと, 仮定より $\delta_0 < \lambda$ 。又, δ_0 の定義より, 最小上界を
 持たない $\{a_\alpha \mid \alpha < \delta_0\}$ が存在する。今 $\{b_\alpha \mid \alpha < \delta_0\} \in \text{PDF}(A)$ を
 $b_\alpha = a_\alpha \wedge \sim \bigvee_{\beta < \alpha} a_\beta$ ($\alpha < \delta_0$) により定義する。仮定より
 $\bigvee_{\alpha < \delta_0} a_\beta$ は存在する。又, $\{b_\alpha \mid \alpha < \delta_0\} \in \text{PDF}(A)$ は条件より最小
 上界 $\bigvee_{\alpha < \delta_0} b_\alpha$ を持つ。しかし, これは $\{a_\alpha \mid \alpha < \delta_0\}$ の最小上界に
 なっており仮定に反する。従って A は λ -完備である。+

定理6 A を λ -完備とする。 (A, B) が κ -Mansfield pair
 ならば $B(A)$ は λ -完備である。

proof) lemma 5 より $\{f_\alpha \mid \alpha < \delta\} \in \text{PDF}(B(A))$ ($\delta < \lambda$) に最小上界
 が存在することを見れば十分である。関数 $P: A \rightarrow B$ を
 $P(a) = \bigvee \{f_\alpha(a) \mid \alpha < \delta\}$ により定義する。 $P(a) \wedge P(a') > 0$ で $a \neq a'$
 とする。 $f_\alpha(a) \wedge f_\beta(a') > 0$ となる $\alpha, \beta < \delta$ ($\alpha \neq \beta$) が存在する。
 従って lemma 4 より $a \wedge a' = 0$ である。 A は B に関する κ -
 chain condition を満たすから $\bigvee_{i \in I} b_i = 1$ で $|\{a \mid P(a) \wedge b_i > 0\}| < \kappa$
 となる $\{b_i \mid i \in I\} \subset B$ が存在する。任意の $i \in I$ と $a \in A^+$ に対し
 $X_a = \{b_i \wedge f_\alpha(a) \mid \alpha < \delta\} \cup \{b_i \wedge \sim P(a)\} \in \text{PART}(B \mid b_i)$ とおく。

$|\{X_a \mid a \in A^+ \wedge |a| < k\}| < \kappa$ か $\bigwedge_{a \in A^+} \bigvee X_a = b_i$ である。 ($< \kappa, |A|$) - distributive law より $b_i = \bigvee \{ \bigwedge_{a \in A^+} p(a) \mid p \in \prod_{a \in A^+} X_a \}$ である。
 $b_{i,p} = \bigwedge_{a \in A^+} p(a)$, $K_i = \{ p \in \prod_{a \in A^+} X_a \mid b_{i,p} > 0 \}$ とおく。この時、
 $f_\alpha(a) \wedge b_{i,p} > 0 \Leftrightarrow \exists i \in I, p \in K_i, a \in A^+, \alpha < \delta [b_{i,p} \leq f_\alpha(a)]$ と
 なる。又、この事より $f_\alpha(0) \wedge b_{i,p} > 0 \Leftrightarrow \exists i \in I, p \in K_i, \alpha < \delta [b_{i,p} \leq f_\alpha(0)]$ を得る。
 従って $\bigvee_{a \in A} f_\alpha(a) = 1$ より、任意の $i \in I, p \in K_i, \alpha < \delta$ に対し $\{a \mid f_\alpha(a) \wedge b_{i,p} > 0\} \neq \emptyset$ 。従って
 任意の $i \in I, p \in K_i, \alpha < \delta$ に対し $b_{i,p} \leq f_\alpha(a)$ とする a が存在する。
 又、 $a \neq a'$ ならば $f_\alpha(a) \wedge f_\alpha(a') = 0$ であるから、この様子 a は一意に定まる。 $g_{i,p}(\alpha)$ をこの a とする。この時
 $\bigvee_{i \in I} \bigvee_{p \in K_i} \bigvee_{\alpha < \delta} f_\alpha(g_{i,p}(\alpha)) \geq \bigvee_{i \in I} \bigvee_{p \in K_i} b_{i,p} \geq \bigvee_{i \in I} b_i = 1$ であるから
 $\bigvee_{p \in A^\delta} \bigwedge_{\alpha < \delta} f_\alpha(p(\alpha)) = 1$ とする。次に $f \in \mathcal{B}(A)$ を
 $f = \sum_{p \in A^\delta} \bigwedge_{\alpha < \delta} f_\alpha(p(\alpha)) \cdot (\bigvee_{\alpha < \delta} p(\alpha))^*$ により定義すると、
 $f_\alpha(a) = f_\alpha(a) \wedge \bigvee_{p \in A^\delta} \bigwedge_{\beta < \delta} f_\beta(p(\beta)) = \bigvee_{p(\alpha)=a} \bigwedge_{\beta < \delta} f_\beta(p(\beta))$
 $= \sum_{p \in A^\delta} \bigwedge_{\beta < \delta} f_\beta(p(\beta)) \cdot (p(\alpha))^*(a)$ とする。従って、
 $f_\alpha = \sum_{p \in A^\delta} \bigwedge_{\beta < \delta} f_\beta(p(\beta)) \cdot p(\alpha)^*$ である。 lemma 3 (ii) より
 $f = \sum_{p \in A^\delta} \bigwedge_{\beta < \delta} f_\beta(p(\beta)) \cdot (\bigvee_{\alpha < \delta} p(\alpha))^*$
 $= \bigvee_{\alpha < \delta} \sum_{p \in A^\delta} \bigwedge_{\beta < \delta} f_\beta(p(\beta)) \cdot (p(\alpha))^*$
 $= \bigvee_{\alpha < \delta} f_\alpha$ 。
 従って $\{f_\alpha \mid \alpha < \delta\}$ は最小上界系を持つ。よって $\mathcal{B}(A)$ は λ -完備である。 \dashv

ブール代数値の集合論では $B(A)$ は次の様に定義される。

$$B(A) = (A)^{\wedge} = \{f \in V^{(B)} \mid \llbracket f \in A \rrbracket^{V(B)} = 1\}.$$

Solovay - Tennenbaum [6] の中の lemma より $B(A)$ が完備

$\Leftrightarrow \llbracket A \text{ が完備} \rrbracket = 1$ であることが言える。従って、次の Corollary を得る。

Corollary 7 A を完備とする。 (A, B) が κ -Mansfield pair ならば、 $\llbracket A \text{ は完備である} \rrbracket = 1$ となる。

§3 Iterated Boolean powers

ここでは A, B 共に完備とする。

M の A による Boolean power $M^{(A)}$ は次の様に定義される。

$$M^{(A)} = \{f \in A^M \mid \{f(m) \mid m \in M\} \in \text{PART}(A)\},$$

$$\llbracket \varphi(f_1, \dots, f_k) \rrbracket = \bigvee \{f_1(m_1) \wedge \dots \wedge f_k(m_k) \mid M \models \varphi(m_1, \dots, m_k)\}.$$

又、 $M^{(A)}$ の B による iterated Boolean power $(M^{(A)})^{(B)}$ は次の様に定義される。

$$(M^{(A)})^{(B)} = \{F \in B^{M^{(A)}} \mid \{F(f) \mid f \in M^{(A)}\} \in \text{PART}(B)\},$$

$$\llbracket \varphi(F_1, \dots, F_k) \rrbracket = \sum_{f_1, \dots, f_k} (F_1(f_1) \wedge \dots \wedge F_k(f_k)) \cdot \llbracket \varphi(f_1, \dots, f_k) \rrbracket^*.$$

定理 8 $B(A)$ が完備ならば $(M^{(A)})^{(B)} \leq_{B(A)} M^{(B(A))}$ である。

proof) 関数 $e: (M^{(A)})^{(B)} \rightarrow M^{(B(A))}$ を $e(F)(m) = \sum_{f \in M^{(A)}} F(f) \cdot f(m)^*$

$(F \in (M^{(A)})^{(B)}, m \in M)$ により定義する。 $m \neq n$ とすると、

$$e(F)(m) \wedge e(F)(n) = \sum_f F(f) \cdot f(m)^* \wedge \sum_g F(g) \cdot g(n)^*$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{f, g} (F(f) \wedge F(g)) \cdot (f(m) \wedge g(n))^* \\
&= \sum_f F(f) \cdot (f(m) \wedge f(n))^* \\
&= \sum_f F(f) \cdot 1^* \\
&= 1^*
\end{aligned}$$

$$\text{更に } \bigvee_{m \in M} e(F)(m) = \bigvee_{m \in M} \sum_f F(f) \cdot (f(m))^* = \sum_f F(f) \cdot \left(\bigvee_{m \in M} f(m) \right)^* = \sum_f F(f) \cdot 1^* = 1^*$$

であるから, $e(F) \in M(B(A))$ である。

$$\begin{aligned}
\text{又, } \llbracket \varphi(F_1, \dots, F_k) \rrbracket &= \sum_{f_1, \dots, f_k} \left(\bigwedge_{\ell=1}^k F_\ell(f_\ell) \right) \cdot \llbracket \varphi(f_1, \dots, f_k) \rrbracket^* \\
&= \sum_{f_1, \dots, f_k} \left(\bigwedge_{\ell=1}^k F_\ell(f_\ell) \right) \cdot \left(\bigvee_{M \models \varphi(m_1, \dots, m_k)} \bigwedge_{\ell=1}^k f_\ell(m_\ell) \right)^* \\
&= \bigvee_{M \models \varphi(m_1, \dots, m_k)} \sum_{f_1, \dots, f_k} \left(\bigwedge_{\ell=1}^k F_\ell(f_\ell) \right) \cdot \left(\bigwedge_{\ell=1}^k f_\ell(m_\ell) \right)^* \\
&= \bigvee_{M \models \varphi(m_1, \dots, m_k)} \bigwedge_{\ell=1}^k \sum_{f_\ell} F_\ell(f_\ell) \cdot (f_\ell(m_\ell))^* \\
&= \bigvee_{M \models \varphi(m_1, \dots, m_k)} \bigwedge_{\ell=1}^k e(F_\ell)(m_\ell) \\
&= \llbracket \varphi(e(F_1), \dots, e(F_k)) \rrbracket.
\end{aligned}$$

従って e は $B(A)$ -elementary embedding である。→

次に iterated Boolean ultrapowers について Mansfield の定理と同様の定理を証明する。

定理 9 (A, B) が k -Mansfield pair ならば

$$(M(A))^{(B)} \simeq_{B(A)} M^{(B(A))}$$

proof) $e: (M(A))^{(B)} \rightarrow M^{(B(A))}$ を定理 8 の証明で構成した関数とする。定理 6 及び 8 より, e が surjection であることを示せば十分である。 $p \in M^{(B(A))}$ とする。 $F_p \in (M(A))^{(B)}$ を $F_p(f) = \bigwedge_{m \in M} p(m) f(m)$ により定義する。 $f \neq g$ とすると,

$F_p(f) \wedge F_p(g) = 0$ である。 $\{p(m) \mid m \in M\} \in \text{PART}(B(A))$ であるから

定理 6 の証明より, $\bigvee_{f \in A^M} \bigwedge_{m \in M} p(m)(f(m)) = 1$ かつ

$p(m) = \sum_{f \in A^M} (\bigwedge_{m \in M} p(m)(f(m))) \cdot f(m)^*$ を得る。 lemma 4 より,

$\{f(m) \mid m \in M\} \in \text{PDF}(A)$ ならば $\bigwedge_{m \in M} p(m)(f(m)) = 0$ である。 又,

$\bigvee_{m \in M} p(m) = \sum_f (\bigwedge_{m \in M} p(m)(f(m))) \cdot (\bigvee_{m \in M} f(m))^* = 1^*$ かつ,

$\{f(m) \mid m \in M\} \in \text{PDF}(A)$ ならば $\{f(m) \mid m \in M\} \notin \text{PART}(A)$ ならば

$\bigwedge_{m \in M} p(m)(f(m)) = 0$ である。 従って $\bigvee_{f \in M(A)} \bigwedge_{m \in M} p(m)(f(m)) = \bigvee_{f \in M(A)} F_p(f) = 1$

となるから, $F_p \in (M(A))^{(B)}$ である。 \square

$e(F_p)(m) = \sum_{f \in M(A)} F_p(f) \cdot f(m)^* = p(m)$ かつ $e(F_p) = p$.

よって e は surjection である。

References

- [1] C.C. Chang and H.J. Keisler, Model theory, North Holland, 1973
- [2] P.R. Halmos, Lectures on Boolean algebras, Van Nostrand, 1963
- [3] B. Koppelberg and S. Koppelberg, A Boolean ultrapower which is not an ultrapower, J. Symb. Logic 41 (1976) pp 245-249
- [4] R. Mansfield, The theory of Boolean ultrapowers, Ann. Math. Logic 2 (1971) pp 297-323
- [5] R. Sikorski, Boolean algebras, Springer Verlag 1964
- [6] R.M. Solovay and S. Tennenbaum, Iterated Cohen extension and Souslin's problem, Ann. Math. 94 (1971) pp 201-245